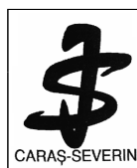




MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026

Clasa a IX-a

○ Timp de lucru: 180 de minute. ○ Din oficiu se acordă 10 puncte.

Problema 1. (22 de puncte)

(a) Arătați că $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, pentru orice numere $x, y \in (0, +\infty)$.

(b) Demonstrați că, dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $ab + bc + ca = 3abc$, atunci $\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 6$.

(Supliment GM 9/2025, enunț ușor modificat)

Problema 2. (22 de puncte)

Se notează cu V intersecția diagonalelor unui paralelogram $ABCD$ și se consideră punctele

U, T și S astfel încât $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{UB}$, $\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{DT}$ și $VT \cap CD = \{S\}$.

(a) Determinați numărul întreg k pentru care punctele U, V și T sunt coliniare

(b) Arătați că, dacă $k = 2$, atunci $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{ST} = \vec{0}$.

Problema 3 (23 de puncte)

Rezolvați ecuația $x + [x] = 5 \cdot \{x\}$, unde notațiile folosite sunt cele uzuale pentru partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

(Supliment GM 10/2025, enunț ușor modificat)

Problema 4. (23 de puncte) Se consideră o mulțime $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ care are proprietățile:

(1) $0 \in \mathcal{A}$. (2) dacă $(2a - 3b) \in \mathcal{A}$, atunci $a \in \mathcal{A}$ și $b \in \mathcal{A}$.

Demonstrați că: (a) $20 \in \mathcal{A}$ și $2026 \in \mathcal{A}$. (b) $\mathbb{Z} \subset \mathcal{A}$ și $\mathcal{A} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Subiecte selectate de prof. Delia Maria Filip